Calcola i seguenti limiti risolvendo le eventuali forme di indeterminazione

Esercizio no.1 *Soluzione a pag.8*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-5}{2x^2+1} \qquad R\left[\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.2 *Soluzione a pag.8*

$$\lim_{x\to2^-}\frac{-3}{x-2} \qquad R[-\infty]$$

Esercizio no.3 *Soluzione a pag.8*

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+3}{x-1} \qquad R[\infty]$$

Esercizio no.4 *Soluzione a pag.8*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-3x} \qquad R\left[\;0^+\;\right]$$

Esercizio no.5 *Soluzione a pag.9*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{lg\,x}{x} \qquad R[-\infty]$$

Esercizio no.6 *Soluzione a pag.9*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+2\cos x}{2x+3} \qquad R\left[\frac{2}{3}\right]$$

Esercizio no.7 *Soluzione a pag.9*

$$\lim_{x\to\infty}(x+\sin x) \qquad R[\infty]$$

Esercizio no.8 *Soluzione a pag.9*

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2-2x}{x^2-2x+1} \qquad R[-\infty]$$

Esercizio no.9 *Soluzione a pag.10*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{5x+\sin x} \qquad R\left[\frac{5}{2}\right]$$

Esercizio no.10 *Soluzione a pag.10*

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^3-8x^2+4x-1}{x^2-3x+2} \qquad R\left[-3\right]$$

Esercizio no.11 *Soluzione a pag.11*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \qquad R\left[\frac{1}{4}\right]$$

Esercizio no.12 *Soluzione a pag.11*

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\lg x+3}{3\lg x-1} \qquad R\left[\frac{1}{3}\right]$$

Esercizio no.13 *Soluzione a pag.11*

$$\lim_{x\to \infty}\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-x+3}} \qquad R\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

Esercizio no.14 *Soluzione a pag.12*

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x-5} \qquad R\left[-\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.15 *Soluzione a pag.13*

$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right) \qquad R\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

Esercizio no.16 *Soluzione a pag.13*

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1+\sin x}{2+\cos x} \qquad R\left[\text{non esiste}\right]$$

Esercizio no.17 *Soluzione a pag.14*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin x}{x} \qquad R\left[3\right]$$

Esercizio no.18 *Soluzione a pag.14*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} \qquad R\left[2\right]$$

Esercizio no.19 *Soluzione a pag.14*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x} \qquad R\left[\frac{5}{2}\right]$$

Esercizio no.20 *Soluzione a pag.14*

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 3x}{4x} \qquad R\left[\frac{15}{4}\right]$$

Esercizio no.21 *Soluzione a pag.15*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 6x} \qquad R\left[\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.22 *Soluzione a pag.15*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} \qquad R\;[2]$$

Esercizio no.23 *Soluzione a pag.15*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x+tgx} \qquad R\;[1]$$

Esercizio no.24 *Soluzione a pag.15*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cdot tgx} \qquad R\;[\infty]$$

Esercizio no.25 *Soluzione a pag.15*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} \qquad R\;[0]$$

Esercizio no.26 *Soluzione a pag.15*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2} \qquad R\left[\frac{1}{4}\right]$$

Esercizio no.27 *Soluzione a pag.16*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos^2 x} \qquad R\;[2]$$

Esercizio no.28 *Soluzione a pag.16*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{2x+tgx}$$ $R\left[\frac{2}{3}\right]$

Esercizio no.29 *Soluzione a pag.16*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+2x-5x^2}{2\sin x-x}$$ $R\left[5\right]$

Esercizio no.30 *Soluzione a pag.16*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3tg^2x}{1-\cos x}$$ $R\left[6\right]$

Esercizio no.31 *Soluzione a pag.16*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$$ $R\left[\sqrt{2}\right]$

Esercizio no.32 *Soluzione a pag.17*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{1-ctgx}$$ $R\left[1\right]$

Esercizio no.33 *Soluzione a pag.17*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{tgx-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}ctgx}$$ $R\left[\sqrt{3}\right]$

Esercizio no.34 *Soluzione a pag.17*

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cos x-5\cos^2 x}{4\sin^2 x}$$ $R\left[\frac{5}{8}\right]$

Esercizio no.35 *Soluzione a pag.17*

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{1-\cos x}}{3x}$$ $R\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$

Esercizio no.36 *Soluzione a pag.17*

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3} \qquad R\left[\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.37 *Soluzione a pag.18*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \sin 2x}{1 - \cos^3 x} \qquad R\,[8]$$

Esercizio no.38 *Soluzione a pag.18*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin 2x + 2\sin x - \cos x}{\sin^2 x} \qquad R\left[\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.39 *Soluzione a pag.18*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{tgx - \sin x} \qquad R\,[2]$$

Esercizio no.40 *Soluzione a pag.18*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - 1}{\cos^2 x} \qquad R\left[-\frac{3}{2}\right]$$

Esercizio no.41 *Soluzione a pag.19*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \qquad R\left[\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.42 *Soluzione a pag.19*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x}{(2 - \cos x)(1 - \cos x)} \qquad R\,[4]$$

Esercizio no.43 *Soluzione a pag.19*

$$\lim_{x\to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad R\,[1]$$

Esercizio no.44 *Soluzione a pag.19*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \qquad R\left[\frac{3}{2}\right]$$

Esercizio no.45 *Soluzione a pag.19*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad R\left[\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.46 *Soluzione a pag.20*

$$\lim_{x \to 0} x\left(2 - \frac{3}{x}\right) \qquad R\left[-3\right]$$

Esercizio no.47 *Soluzione a pag. 20*

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^{2x} - 1}{x} \qquad R\left[\ln 25\right]$$

Esercizio no.48 *Soluzione a pag. 20*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x} \qquad R\left[3\right]$$

Esercizio no.49 *Soluzione a pag.21*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{e^{2x} - 1} \qquad R\left[\frac{5}{2}\right]$$

Esercizio no.50 *Soluzione a pag.22*

$$\lim_{x \to 3} \frac{2^{x-3} - 1}{x - 3} \qquad R\left[\ln 2\right]$$

Esercizio no.51 *Soluzione a pag.22*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{e^x - e} \qquad R\left[\frac{1}{e}\right]$$

Esercizio no.52 *Soluzione a pag.23*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{e^{2x} - 1} \qquad R\left[\frac{1}{6}\right]$$

Esercizio no.53 *Soluzione a pag.23*

$$\lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x^3)}{\sin x^2\cdot(1+e^{2x})} \qquad R\left[-\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.54 *Soluzione a pag.24*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{lg(1+tg^2 x)} \qquad R\left[\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio no.55 *Soluzione a pag.24*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2x^2}{1+3x^2-\cos x} \qquad R\left[\frac{5}{7}\right]$$

Esercizio no.56 *Soluzione a pag.24*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x \qquad R\left[\sqrt[3]{e}\right]$$

Esercizio no.57 *Soluzione a pag.25*

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x^2} \qquad R[e]$$

Esercizio no.58 *Soluzione a pag.25*

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^{3x-3}-1}{3x^2+x-4} \qquad R\left[\frac{7}{3}\ln 2\right]$$

Esercizio no.59 *Soluzione a pag.26*

$$\lim_{x\to -\infty}(x^3+x^2-3) \qquad R[-\infty]$$

Esercizio no.60 *Soluzione a pag.26*

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin 2x\cdot ctgx) \qquad R[2]$$

Esercizio no.1:soluzione

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-5}{2x^2+1}$$ presenta la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

si raccoglie al numeratore e al denominatore x^2

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-5}{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

gli x^2 raccolti fuori dalla stessa parentesi al numeratore e al denominatore sono infiniti dello stesso ordine per $x\to-\infty$ si possono semplificare fra loro.

Esercizio no.2:soluzione

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-3}{x-2}$$

per x che tende a 2 da sinistra al denominatore avremo $2^- - 2 = 0^+$,
come dire un po' più di 0. per cui scriveremo:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-3}{x-2}=-\frac{3}{0^+}=-\infty$$

Esercizio no.3:soluzione

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x-1}$$ anche in questo caso raccogliamo la x al numeratore e al denominatore.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x-1}=\frac{5}{1-1}=\infty$$

Per essere più precisi, possiamo notare che:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+3}{x-1}=\frac{5}{1^- -1}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+3}{x-1}=\frac{5}{1^+ -1}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

Esercizio no.4:soluzione

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-3x}=2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-3x}=2\cdot\frac{1}{1+\infty}=2\cdot 0^+=0^+$$

Esercizio no.5:soluzione

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{lg\, x}{x}$ tende alla forma $\left[\dfrac{-\infty}{0^+} \right]$ che non è indeterminata, dato che equivale a

$(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$ si può, dunque, scrivere: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{tgx}{x} = -\infty$.

Esercizio no.6:soluzione

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + 2\cos x}{2x+3} = \frac{0 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 0 + 3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio no.7:soluzione

$$\lim_{x \to \infty} (x + \sin x)$$

In questo caso, il problema è dato dal fatto che $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ non esiste.

Notiamo che $\lim\limits_{x \to \infty} (x + \sin x) = \lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \left(1 + \dfrac{\sin x}{x} \right)$

bisogna qui ricordarsi del limite notevole

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ per cui scriveremo: $\lim\limits_{x \to \infty} (x + \sin x) = \lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \left(1 + \dfrac{\sin x}{x} \right) = \infty \cdot 1 = \infty$

Esercizio no.8:soluzione

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2-2x}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{2-2}{1-2+1} = \dfrac{0}{0}$ si tratta di una forma di indeterminazione.

Notiamo che $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ quindi per l'espressione

$$\frac{2-2x}{x^2-2x+1} = \frac{2(1-x)}{(x-1)^2} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2-2x}{x^2-2x+1} = -\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x-1} = -\frac{2}{1^- - 1} = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

Esercizio no.9:soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{5x+\sin x}$$

Come già visto per il precedente caso ci si avvale del limite notevole $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{5x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(5+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{5}{2}$$

Esercizio no.10:soluzione

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^3-8x^2+4x-1}{x^2-3x+2}$$

Sostituendo il valore

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^3-8x^2+4x-1}{x^2-3x+2}=\frac{5-8+4-1}{1-3+2}=\frac{0}{0}$$

Decomponiamo il numeratore con la regola di Ruffini:

	5	-8	4	-1
1		5	-3	1
	5	-3	1	0

possiamo scrivere $5x^3-8x+4x-1=(x-1)(5x^2-3x+1)$

Il denominatore viene ridotto con la formula del trinomio:

$$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$$ quindi..

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^3-8x^2+4x-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(5x^2-3x+1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{5-3+1}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

Esercizio no.11:soluzione

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

Si osserva come $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$ che è una forma di indeterminazione.

Al denominatore abbiamo:

$x^2-1=(x-1)(x+1)=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)$ per cui:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$$

Esercizio no.12:soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lg x+3}{3\lg x-1}$$

Sapendo che $\lim_{x\to\infty}\lg x=\infty$ il limite dato palesa una forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$.
In questo è conveniente usare lo stesso metodo delle funzioni razionali fratte: si raccoglie il termine che tende al ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lg x+3}{3\lg x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{\lg x}\cdot\left(1+\frac{3}{\lg x}\right)}{\cancel{\lg x}\cdot\left(3-\frac{1}{\lg x}\right)}=\frac{1}{3}$$

Esercizio no.13:soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-x+3}}=\frac{\infty}{\infty}$$ forma di indeterminazione.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\sqrt{\left(3-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Esercizio no.14:soluzione

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x-5}=\frac{\infty}{\infty}$$ forma di indeterminazione.

Usando lo stesso metodo dell'esercizio precedente e ricordandosi che:

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & se \quad x>0 \\ 0 & se\; x=0 \\ -x & se \quad x<0 \end{cases}$$ quindi nel nostro caso $\sqrt{x^2}=-x$ perché $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{\cancel{x}\cdot\left(2-\frac{5}{x}\right)}=-\frac{1}{2}$$

Esercizio no.15:soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right)=\infty-\infty$$

Viene, in questo caso, effettuata la razionalizzazione, quindi, l'espressione:

$$\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}=\frac{\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}\right)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}}=$$

$$=\frac{2x^2-1-(2x^2-x-1)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}}=\frac{\cancel{2x^2}\cancel{-1}\cancel{-2x^2}+x\cancel{+1}}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}}$$

avremo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Se invece il limite fosse stato:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{-x\cdot\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Esercizio no.16:soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$$

Dato che $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ non esiste come $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ dato che al tendere di x ad∞ i due termini continuano ad oscillare fra 1 e -1. Si deduce:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{2+\cos x}=\nexists \quad \text{non esiste}$$

Esercizio no.17:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin x}{x}=\frac{2\cdot 0+0}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]$$ forma di indeterminazione.

Ricordando il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)=2+1=3$$

Esercizio no.18:soluzione

Si avrebbe: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$ forma di indeterminazione

Se pensiamo alle forme di duplicazione si ha $\sin 2x=2\sin x\cos x$ per cui:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=2\cdot 1\cdot 1=2$$

Esercizio no.19:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$ forma di indeterminazione

Qui l'artificio sta nel porre per sostituzione $t=5x \quad\rightarrow\quad x=\frac{t}{5}$ dato che per $x\to 0 \quad t\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{5}}=\frac{5}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

Esercizio no.20:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 3x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$ forma di indeterminazione

Anche qui ponendo $t=3x \quad\rightarrow\quad x=\frac{t}{3}$ dato che per $x\to 0 \quad t\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 3x}{4x}=\lim_{t\to 0}\frac{5\sin t}{4\cdot\frac{t}{3}}=\frac{15}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{15}{4}$$

Esercizio no.21:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 6x}$$ per le forme di duplicazione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sin 3x}}{2\cancel{\sin 3x}\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos 3x}=\frac{1}{2}$$

Esercizio no.22:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$ per le forme di duplicazione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}2\cos x=1\cdot 2=2$$

Esercizio no.23:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x+tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x\cdot\left(1+\frac{tgx}{x}\right)}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1+\frac{tgx}{x}\right)}=3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

dato che $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}==1\cdot 1=1$

Esercizio no.24:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cdot tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x\cdot tgx}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x\cdot tgx}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{0}=\infty$$

Esercizio no.25:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}=0\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=0$$

Esercizio no.26:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2x^2(1+\cos x)}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{(1+1)}=\frac{1}{4}$$

Esercizio no.27:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2 x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=2$$

Esercizio no.28:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{2x+tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot\left(3-\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(2+\frac{tgx}{x}\right)}=\frac{3-1}{2+1}=\frac{2}{3}$$

Esercizio no.29:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+2x-5x^2}{2\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot\left(3\frac{\sin x}{x}+2-5x\right)}{\cancel{x}\cdot\left(2\frac{\sin x}{x}-1\right)}=\frac{3+2-0}{2-1}=\frac{5}{1}=5$$

Esercizio no.30:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{3tg^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3tg^2 x\cdot(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3tg^2 x\cdot(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0}3tg^2 x\cdot\frac{(1+\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{(1+\cos x)}{\sin^2 x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)}{\cos^2 x}=3\cdot\frac{(1+1)}{1}=6$$

Esercizio no.31:soluzione

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}{\cancel{(\cos x-\sin x)}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Esercizio no.32:soluzione

Ricordiamoci che $ctgx=\frac{1}{tgx}=\frac{\cos x}{\sin x}$ quindi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{1-ctgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{1-\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cancel{\sin x-\cos x}}{\cos x}}{\frac{\cancel{\sin x-\cos x}}{\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}=1$$

Esercizio no.33:soluzione

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tgx-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}ctgx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\cancel{\sin x-\sqrt{3}\cos x}}{\cos x}}{\frac{\cancel{\sin x-\sqrt{3}\cos x}}{\sin x}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}tgx=\sqrt{3}$$

Esercizio no.34:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cos x-5\cos^2 x}{4\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos x(1-\cos x)}{4(1-\cos^2 x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cos x(1-\cos x)}{4(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos x}{4(1+\cos x)}=\frac{5\cdot 1}{4\cdot(1+1)}=\frac{5}{8}$$

Esercizio no.35:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{1-\cos x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}{3x\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{\sin^2 x}}{3x\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{3x\sqrt{1+\cos x}}=$$

$$\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{2}}{3\cdot\cancel{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Esercizio no.36:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x\sin x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin^2 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=1\cdot\frac{1}{1\cdot(1+1)}=\frac{1}{2}$$

Esercizio no.37:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 2x}{1-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cdot\sin x\cos x}{1-\cos x\cdot\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{4x\cdot\sin x\cos x}{x^2}}{\dfrac{1-\cos x\cdot(\cos^2 x)}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\cos^2 x}=\frac{4\cdot 1\cdot 1}{\dfrac{1}{2}\cdot 1}=8$$

Esercizio no.38:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x+2\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin x\cos x+2\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)-\cos x(1+2\sin x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)(1-\cos x)}{\sin^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)(1-\cos^2 x)}{\sin^2 x\cdot(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)}{(1+\cos x)}=\frac{(1+0)}{(1+1)}=\frac{1}{2}$$

Esercizio no.39:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{tgx-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x\cos x}{\sin x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x(1+\cos x)}{(1-\cos^2 x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1+\cos x)}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{1\cdot(1+1)}{1}=2$$

Esercizio no.40:soluzione

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x-1}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x(\sin x-1)-1+\sin^2 x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x(\sin x-1)-(1-\sin^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x(\sin x-1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin^2 x}{(1+\sin x)}-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{(1-\sin^2 x)}}{\cancel{(1-\sin^2 x)}}=-\frac{1}{(1+1)}-1=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$$

Esercizio no.41:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{(1+\cos x)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Esercizio no.42:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{(2-\cos x)(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x\sin x}{x^2}}{(2-\cos x)\frac{(1-\cos x)}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sin x}{x}}{(2-\cos x)\frac{(1-\cos x)}{x^2}}=\frac{2}{(2-1)\cdot\frac{1}{2}}=4$$

Esercizio no.43:soluzione

$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Sostituendo $t=\frac{1}{x}$ avremo che per $x\to\infty$ $t\to 0$ il limite diventa allora:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

Esercizio no.44:soluzione

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$ presenta forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$ semplifichiamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Esercizio no.45:soluzione

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ presenta forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$ semplifichiamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Esercizio no.46:soluzione

$\lim_{x\to 0} x\cdot\left(2-\frac{3}{x}\right)$ presenta forma di indeterminazione $0\cdot\infty$ procediamo

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\left(2-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to 0}(2x-3)=-3$$

Esercizio no.47:soluzione

$\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{x}$ presenta forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$

poniamo $t=2x \quad\to\quad x=\frac{t}{2}$ notando che per $x\to 0$ si ha $t\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{5^{t}-1}{t/2}=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{5^{t}-1}{t}$$

se vogliamo avvalerci del limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$ avremo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{x}=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{5^{t}-1}{t}=2\ln 5=\ln 5^{2}=\ln 25$$

Esercizio no.48:soluzione

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$ presenta forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$

ci avvaliamo del limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

poniamo $t=3x \quad\to\quad x=\frac{t}{3}$ notando che per $x\to 0$ si ha $t\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t/3}=3\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=3$$

Esercizio no.49:soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^{2x}-1}$$ presenta forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\cdot\frac{x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}$$

Il primo limite è risolvibile come si è già visto ponendo:

$t=5x \quad\to\quad x=\frac{t}{5}$ notando che per $x\to 0$ si ha $t\to 0$ quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t/5}=5\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=5$$

Per il secondo limite osserviamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{x}}$$ basta dunque risolvere il limite $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$

posto $h=2x\ \to\ x=\frac{h}{2}$ con $h\to 0$ per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h/2}=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=2\cdot 1=2$$

questo per la validità del limite notevole: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{x}}=\frac{1}{2}$$ di conseguenza

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}=\frac{5}{2}$$

Esercizio no.50:soluzione

$$\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{x-3}$$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$; poniamo $t=x-3$ per cui:

per $x\to 3$ si ha $t\to 0$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{2^{t}-1}{t}$$

avvalendosi del limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$ si ha:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{2^{t}-1}{t}=\ln 2$$

Esercizio no.51:soluzione

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x}-e}$ presenta forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$

ponendo $t=x-1 \quad \to x=t+1$ si ha $t\to 0$ per $x\to 1$, per cui

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x}-e}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^{t+1}-e}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{e\cdot e^{t}-e}=\frac{1}{e}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^{t}-1}=\frac{1}{e}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^{t}-1}{t}\right)}=\frac{1}{e}$$

questo per il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

Esercizio no.52:soluzione

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{e^{2x}-1}$ Dopo aver notato che il limite è nella forma $\frac{0}{0}$ procediamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}\cdot\frac{x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$$

ponendo $t=2x$ il secondo limite è riconducibile a $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ per cui:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}$$

La forma che appare è riconducibile al limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a\in R$ da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Esercizio no.53:soluzione

$\lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x^3)}{\sin x^2\cdot(1+e^{2x})}$ Vi è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ procediamo:

$\lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x^3)}{\sin x^2\cdot(1+e^{2x})}=\lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x^3)}{x^3}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\frac{x}{-(e^{2x}-1)}$ abbiamo il prodotto:

$\lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x^3)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\left[-\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}\right]$ operando per sostituzione si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x^3)}{x^3}=1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}=1$ per cui $-\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}=-\frac{1}{2}$ si deduce:

$$\lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x^3)}{\sin x^2\cdot(1+e^{2x})}=-\frac{1}{2}$$

Esercizio no.54:soluzione

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{lg(1+tg^2 x)}$ Ovviamente, la forma è indeterminata, tramite il solito artificio, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg^2 x}\cdot\frac{tg^2 x}{lg(1+tg^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{tg^2 x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{tg^2 x}{lg(1+tg^2 x)}$$ ora:

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{tg^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{tgx}{x}\right)^2}=1$ perché come $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ su ha $\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{lg(1+tg^2 x)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\frac{lg(1+t)}{t}\right)}=1$ per effetto della forma

$\lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x)}{x}=1$

di conseguenza: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{lg(1+tg^2 x)}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

Esercizio no.55:soluzione

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2x^2}{1+3x^2-\cos x}$ forma indeterminata $\frac{0}{0}$ raccogliendo a fattor comune:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2x^2}{1+3x^2-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+2\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+3\right)}=\frac{\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}+3}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}=\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{7}=\frac{5}{7}$$

Esercizio no.56:soluzione

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x$ Si tratta di una forma di indeterminazione del tipo 1^∞ dobbiamo tenere in considerazione il limite notevole:

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ sostituisco $3x=t \Rightarrow x=\frac{t}{3}$ rimane che per $x\to\infty$ $t\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{3}}=\sqrt[3]{\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)}=\sqrt[3]{e}$$

Esercizio no.57:soluzione

$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x^2}$ Pur essendo anche questa una forma 1^∞ sostituisco $x^2=\frac{1}{t}$ per

$x\to 0$ si ha $t\to\infty$

$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x^2}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ per il limite notevole $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Esercizio no.58:soluzione

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^{3x-3}-1}{3x^2+x-4}$$

anche qui $\frac{0}{0}$ poniamo $t=x-1\ \Rightarrow\ x=t+1$ per $x\to 1$ si ha $t\to 0$.

$\lim_{x\to 1}\frac{2^{3(x-1)}-1}{3x^2+x-4}$ il denominatore ammette radici in campo reale.

$x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\begin{cases}\frac{-1+7}{6}=\frac{6}{6}=1\\ \frac{-1-7}{6}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}\end{cases}$ da cui l'espressione

$$3x^2+x-4=3\left(x+\frac{4}{3}\right)\cdot(x-1)=(3x+4)(x-1)=(3t+3+4)t=(3t+7)t$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^{3(x-1)}-1}{3x^2+x-4}=\lim_{t\to 0}\frac{2^{3t}-1}{(3t+7)t}=3\cdot\lim_{t\to 0}\frac{2^{3t}-1}{3t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{(3t+7)}=3\ln 2\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{7}\ln 2$$

abbiamo solo usato il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

Esercizio no.59:soluzione

$\lim_{x\to -\infty} (x^3 + x^2 - 3)$ presenta forma di indeterminazione $-\infty + \infty$

$$\lim_{x\to -\infty} (x^3 + x^2 - 3) = \lim_{x\to -\infty} x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to -\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = -\infty \cdot (1 + 0 + 0) = -\infty$$

questo perché $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

ci si poteva arrivare anche intuitivamente, riconoscendo che x^3 è un infinito di ordine superiore rispetto a x^2.

Esercizio no.60:soluzione

$\lim_{x\to 0^+} (\sin 2x \cdot ctgx)$ presenta forma di indeterminazione $0 \cdot \infty$; l’espressione:

$$\sin 2x \cdot ctgx = 2\sin x \cos x \frac{1}{tgx} = 2\cancel{\sin x}\cos x \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} = 2\cos^2 x = 2 \cdot 1 = 2$$